

# Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise  
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,  
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale,  
A.A. 2022/2023

## Esercitazione 1

**Esercizio 1.** Verificare (analiticamente) che l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

è limitato, aperto e convesso.

**Esercizio 2.** Disegnare gli insiemi

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|(1 - y^2) \leq 0\}, \quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 2\}$$

e stabilire (graficamente) se sono limitati, aperti, chiusi, convessi. Determinare inoltre  $\overset{\circ}{X}$ ,  $\overset{\circ}{Y}$ ,  $\partial X$ ,  $\partial Y$ ,  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$ .

**Esercizio 3.** Determinare (analiticamente) i punti interni, i punti esterni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 2\}, \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

**Esercizio 4.** Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ . Dimostrare o confutare (esibendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

- $A$  aperto,  $B$  chiuso  $\implies A \cap B$  chiuso
- $A, B$  aperti e  $B \subseteq A \implies \partial B \subseteq A$
- $A$  aperto,  $B$  chiuso e  $B \subseteq A \implies \partial B \subseteq A$
- $A, B$  convessi  $\implies A \cap B$  convesso.

**Esercizio 5.** Dimostrare le seguenti affermazioni:

- se  $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ , sono insiemi aperti, allora  $\cup_{i \in I} A_i$  è un insieme aperto;
- se  $C_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ , sono insiemi chiusi, allora  $\cap_{i \in I} C_i$  è un insieme chiuso.

**Esercizio 6.** Disegnare nel piano i seguenti insiemi

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(|x| + 1) - y \geq 0 \text{ e } |y + 3| < 4\},$$
$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 16y^2 < 16\}.$$

Stabilire (analiticamente) se sono limitati e determinarne (graficamente) i punti di frontiera.

**Esercizio 7.** Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

- $f(x, y) = \log\left(\frac{y - 2x^2}{x - y}\right)$
- $g(x, y) = \sqrt{y \sin(x^2 + y^2)}$
- $h(x, y) = \frac{\arcsin(x^2 + y^2 - 1)}{\log(xy)}$ .

**Esercizio 8.** Studiare la limitatezza delle funzioni

- $f(x, y) = \frac{\log(1 + \sin(\arctan(x)))}{y^4 + 3}$
- $g(x, y) = \frac{\log(1 + |y|)}{x^4 + y^6 + 1}$ .

Per la funzione  $g(x, y)$  può risultare utile la disuguaglianza  $\log(1 + t) \leq t$  per ogni  $t > -1$ .

**Esercizio 9.** Determinare gli insiemi di livello della funzione  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .